51
М34

М 34 **Математика сегодня** (Сборник статей. Перевод с англ.). М., «Знание», 1974.
64 с. (Новое в жизни, науке, технике. Серия «Математика, кибернетика», 7. Издается ежемесячно с 1967 г.)

В первой статье сборника описан метод формирования и приближенного решения разнообразных практических задач экономики, психологии, лингвистики и других областей, в которых основную роль играет поведение, характерное для живых существ. Вторая статья посвящена практическому применению теории игр — области математики, исследующей ситуации, в которых сталкиваются интересы различных людей, организаций и т. д.

М $\frac{20200-140}{073(02)-74}$ 57—74 5[1]

Составитель ШИЛЕЙКО А. В.
Переводчики ГОРЕЛИК В. А., ОРЛОВСКИЙ С. А., РИНГО Н. И., СТРИГАЛЕВ А. А.

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ 3
Лотфи А. Заде. ОСНОВЫ НОВОГО ПОДХОДА К АНАЛИЗУ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ И ПРОЦЕССОВ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ 5
Мартин Шубик. ГЕЙМИНГ И ТЕОРИЯ ИГР . 49

МАТЕМАТИКА СЕГОДНЯ

(Сборник статей. Перевод с англ.)

Редактор В. Ю. ИВАНИЦКИЙ. Обложка Л. П. РОМАСЕНКО. Худож. редактор В. Н. КОНЮХОВ. Технич. редактор А. М. КРАСАВИНА Корректор Л. Д. ВАСИЛЬЕВА.

ОСНОВЫ НОВОГО ПОДХОДА К АНАЛИЗУ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ И ПРОЦЕССОВ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

Лотфи А. ЗАДЕ

В этой статье [1] описывается подход, который, по сути дела, представляет собой отказ от общепринятых количественных методов анализа систем. Он имеет три основные отличительные черты: 1) вместо или в дополнение к числовым переменным в нем используются так называемые «лингвистические» переменные; 2) простые отношения между переменными описываются с помощью нечетких высказываний; 3) сложные отношения описываются нечеткими алгоритмами.

Лингвистическая переменная определяется как переменная, значениями которой являются предложения в естественном или формальном языке. Так, например, если *высокий*, *невысокий*, *очень высокий*, *очень-очень высокий* и т. д. суть значения высоты, то высота — лингвистиче-

---

[1] L. A. Zadeh. Outline of a New Approach to the Analysis of Complex Systems and Decision Processes.— *IEEE Trans. Syst., Man, Cybern.*, vol. SMC—3. 1973, Jan., pp. 28—44.

ская переменная. Нечеткими высказываниями называются предложения вида «из *A* следует *B*», в которых *A* и *B* имеют нечеткий смысл, например, «из того, что *x* мало, следует, что *y* велико», где понятия «мало» и «велико» рассматриваются как элементы нечетко определенных множеств. Нечеткий алгоритм представляет собой упорядоченную последовательность инструкций, среди которых могут быть нечеткие инструкции вида «сделать *x очень большим*» — или «если *x* мало, то *y* должно быть велико».

Опираясь на использование лингвистических переменных и нечетких алгоритмов, данный подход дает приближенные, но в то же время эффективные способы описания поведения систем, настолько сложных и плохо определенных, что они не поддаются точному математическому анализу. Основные приложения развиваемого подхода относятся к областям экономики, управления производством, создания «думающих» машин, психологии, лингвистики, обработки информации, медицины, биологии и другим областям, в которых основную роль играет поведение, характерное для живых существ.

Наступление эпохи вычислительных машин вызвало быстрое расширение сферы использования количественных методов анализа за счет их применения для анализа экономических, урбанистических, социальных, биологических и других систем, в которых основную роль играет поведение, напоминающее поведение живых существ. Большинство методов, используемых в настоящее время для анализа *гуманистических* систем, т. е. систем, в которых участвует человек, представляют собой модификации методов, которые в течение длительного времени создавались для *механистических* систем, т. е. систем, управляемых законами механики, электромагнетизма и термодинамики. Замечательные успехи, достигнутые с помощью этих методов, позволили раскрыть многие тайны природы и создавать все более и более совершенные машины. Но эти же успехи вселили широко распространенное убеждение в том, что теми же методами или подобными им можно сравнительно эффективно исследовать и гуманистические системы. Так, например, успехи, достигнутые с помощью теории управления в конструировании космических навигационных систем высокой точности, стимулировали применение этой теории для анализа экономических и биологических систем. Успехи макроскопического анализа физических систем с помощью моделирования на ЦВМ привели к тому, что эконометрическое моделирование с помощью ЦВМ стали применять для решения задач прогнозирования, экономического планирования и управления производством.

По глубоко укоренившейся традиции научного мышления понимание явления отождествляют с возможностью его количественного анализа. Поэтому подвергнуть сомнению правомерность растущей тенденции анализировать гуманистические системы так, как если бы они были механистическими системами, описываемыми в терминах разностных, дифференциальных или интегральных уравнений, означает взять диссонирующую ноту. Как раз такая нота и звучит в этой работе.

Наш основной тезис заключается в том, что по своей сути обычные количественные методы анализа систем непригодны для гуманистических систем и вообще любых систем, сравнимых по сложности с гуманистическими системами. В основе этого тезиса лежит то, что можно было бы назвать *принципом несовместимости*. Суть этого принципа можно выразить примерно так: чем сложнее система, тем менее мы способны дать точные и в то же время имеющие практическое значение суждения о ее поведении. Для систем, сложность которых превосходит некоторый пороговый уровень, точность и практический смысл становятся почти исключающими друг друга характеристиками [1]. Именно в этом смысле точный количественный анализ поведения гуманистических систем не имеет, по-видимому, большого практического значения в реальных социальных, экономических и других задачах, связанных с участием одного человека или группы людей.

Иной подход, развиваемый в этой работе, опирается на предпосылку о том, что элементами мышления человека являются не числа, а элементы некоторых нечетких множеств или классов объектов, для которых переход от «принадлежности к классу» к «непринадлежности» не скачкообразен, а непрерывен. И в самом деле, нечеткость, присущая процессу мышления человека, наводит на мысль о том, что в основе этого процесса лежит не традиционная двузначная или даже многозначная логика, а логика с нечеткой истинностью, нечеткими связями и нечеткими правилами вывода. С нашей точки зрения именно такая нечеткая, еще недостаточно изученная логика играет ос-

[1] Следствие из этого принципа кратко можно выразить так: «Чем глубже мы анализируем реальную задачу, тем неопределеннее становится ее решение».

новную роль в том, что может оказаться одной из наиболее важных сторон человеческого мышления — способности *оценивать* информацию, т. е. выбирать из давящего на мозг разнообразия сведений те и только те, которые имеют отношение к анализируемой проблеме.

По своей природе оценка является приближением. Во многих случаях достаточна весьма приближенная характеризация набора данных, поскольку в большинстве основных задач, решаемых человеком, не требуется высокая точность. Человеческий мозг использует допустимость такой неточности, кодируя информацию, «достаточную для задачи» (или «достаточную для решения») элементами нечетких множеств, которые лишь приближенно описывают исходные данные. Поток информации, поступающей в мозг через органы зрения, слуха, осязания и др., суживается, таким образом, в тонкую струйку информации, необходимой для решения поставленной задачи с минимальной степенью точности. Способность оперировать нечеткими множествами и вытекающая из нее способность оценивать информацию является одним из наиболее ценных качеств человеческого разума, которое фундаментальным образом отличает человеческий разум от так называемого машинного разума, приписываемого существующим вычислительным машинам.

Традиционные методы анализа систем недостаточно пригодны для анализа гуманистических систем именно потому, что они не в состоянии охватить нечеткость человеческого мышления и поведения. Поэтому для действенного анализа гуманистических систем нужны подходы, для которых точность, строгость и математический формализм не являются чем-то абсолютно необходимым и в которых используется методологическая схема, допускающая нечеткости и частичные истины. Подход, описываемый ниже, представляет собой некоторый, пусть не решающий, шаг в этом направлении.

Этот подход имеет три отличительные черты: 1) в нем используются так называемые «лингвистические» переменные, вместо числовых переменных или в дополнение к ним; 2) простые отношения между переменными описываются с помощью нечетких высказываний; 3) сложные отношения описываются нечеткими алгоритмами. Прежде чем перейти к подробному обсуждению нашего подхода, было бы полезно привести основные соображения, лежащие в его основе. Начнем с краткого объяснения смысла лингвистических переменных.

1) *Лингвистические и нечеткие переменные.* Как уже отмечалось, способность оценивать информацию играет существенную роль в характеризации сложных явлений. Способность человека оценивать информацию наиболее ярко проявляется в использовании естественных языков. Каждое слово x естественного языка можно рассматривать как сжатое описание нечеткого подмножества $M(x)$ полного множества области рассуждений U, где $M(x)$ есть значение x. В этом смысле весь язык, как целое, можно рассматривать как систему, в соответствии с которой нечетким подмножествам множества U приписываются элементарные или составные символы (т. е. слова, группы слов и предложения). (Более подробно эта точка зрения обсуждается в работах [4] и [5].) Так, например, если значение существительного *цветок* есть нечеткое подмножество M — (*цветок*), а значение прилагательного *красный*.— нечеткое подмножество M — (*красный*), то значение сочетания *красный цветок* является пересечением M — (*цветок*) и M — (*красный*).

Если рассматривать цвет объекта как некоторую переменную, то значения этой переменной: *красный*, *синий*, *желтый*, *зеленый* и т. д. можно интерпретировать как символы нечетких подмножеств полного множества всех объектов. В этом смысле цвет является *нечеткой переменной*, т. е. переменной, значениями которой являются символы нечетких множеств. Важно отметить, что значение переменной цвет, выраженное понятием естественного языка таким, как красный, гораздо менее точно, чем число, обозначающее длину волны, соответствующую данному цвету.

В предыдущем примере значениями переменной цвет были такие элементарные понятия, как *красный*, *синий*, *желтый* и т. д. В более общем случае значениями таких переменных могут быть предложения в некотором специальном языке, и в этих случаях соответствующие переменные мы будем называть *лингвистическими*. Так, например, нечеткая переменная *высота* могла бы принимать следующие значения: *высокий*, *невысокий*, *довольно высокий*, *очень высокий*, *не очень высокий*, *очень-очень высокий*, *высокий*, *но не очень*, *вполне высокий*, *более или менее высокий*. Эти значения представляют собой предложения, образованные понятием высокий, отрицанием *не*, союзами *и* и *но*, а также нечеткими словами типа *очень*, *довольно*, *вполне* и *более* *или менее*. В этом смысле согласно приведенному выше определению переменная *высота* является лингвистической.

Как будет видно ниже, в разделе III, лингвистические переменные предназначены в основном для систематической характеризации сложных или плохо определенных явлений. В сущности говоря, отказываясь от использования количественных переменных и опираясь на словесные описания типа тех, которыми оперирует человек, мы приобретаем способность анализировать системы настолько сложные, что они недоступны обычному математическому анализу.

2) *Характеризация простых отношений между нечеткими переменными*. В количественных подходах к анализу систем зависимость между двумя числовыми переменными x и y обычно описывают с помощью таблицы, которую словесно можно представить в виде набора высказываний, например, если x равно 5, то y равно 10; если x равно 6, то y равно 14 и т. д.

Такой же способ описания применяется и в нашем подходе, только переменные x и y являются нечеткими. В частности, если x и y — лингвистические переменные, то высказывания, описывающие зависимость y от x, могли бы выглядеть так (слова, набранные курсивом, представляют собой значения нечетких переменных):

если x *мало*, то y *очень очень велико*

если x *не очень мало*, то y *очень велико*

если x *не мало и не велико*, то y *не очень велико* и т. д.

Нечеткие высказывания типа «из A следует B», где A и B имеют неопределенное значение, например, «если Джон *любезен* с тобой, то ты должен быть *добр* к нему», обычны в повседневной речи. Однако в разговоре значения таких высказываний определены очень плохо. В разделе V будет показано, что высказыванию «из A следует B» можно придать точное значение даже тогда, когда A и B — нечеткие множества, если значения A и B определены как некоторые подмножества области рассуждений.

В предыдущем примере отношение между нечеткими переменными x и y является *простым* в том смысле, что его можно описать как множество высказываний вида «из A следует B», где A и B — символы нечетких множеств, представляющие собой значения переменных x и y соответственно. Для описания более сложных зависимостей y от x могут потребоваться нечеткие алгоритмы. Как будет показано подробно в разделе IV, понятие нечеткого алгоритма играет основную роль в построении способов приближенного описания неопределенных понятий и их взаимоотношений.

3) *Описание нечетких функций и отношений с помощью нечетких алгоритмов*. Задание нечеткой функции с помощью нечетких высказываний аналогично заданию обычной функции таблицей пар вида $(x, f(x))$, где x — значение аргумента, $f(x)$ — соответствующее значение функции. Вместо таблицы обычную функцию можно определить алгоритмически (т. е. с помощью программы) и точно так же с помощью нечеткого алгоритма можно определить нечеткую функцию. То же самое относится и к определению множеств, нечетких отношений и других объектов.

По своей сути нечеткий алгоритм [6] представляет собой упорядоченную последовательность инструкций (подобно программе для вычислительной машины), некоторые из которых могут содержать символы нечетких множеств, например:

если y *велико*, то *немного уменьшить* x

если y *не очень велико и не очень мало*, *то очень не намного увеличить* x

если y *мало*, то *стоп*; если *нет*, *то увеличить* x на 2.

То, что в алгоритме допускаются инструкции подобного типа, позволяет приближенно описывать с его помощью самые разнообразные сложные явления. Важно то, что будучи нечеткими по своей природе, такие описания могут быть полностью адекватны целям поставленной задачи. Нечеткие алгоритмы такого рода могут дать эффективные способы приближенного описания целевых функций, ограничений, функционирования системы, стратегий и т. д.

В дальнейшем мы остановимся на некоторых из основных свойств лингвистических переменных, нечетких высказываний и нечетких алгоритмов. Однако мы не будем пытаться представить наш подход и его приложения в каком-то окончательном виде. Эту статью следует рассматривать прежде всего как предварительное общее описание метода, являющегося отходом от традиции точности и строгости в научном анализе, метода, приближенная природа которого отражает неопределенность поведения человека и поэтому может стать основой более реалистического анализа гуманистических систем.

Из последующих разделов будет видно, что теоретические основания нашего подхода на самом деле вполне точны и математичны по духу. Дело в том, что источником неопределенности в нашем подходе является не лежащая в его основе теория, а способы использования лингвистических переменных и нечётких алгоритмов в формулировании и решении реальных задач. В действительности, в каждом случае степень точности решения может быть согласована с требованиями задачи и точностью имеющихся данных. Подобная гибкость составляет одну из важных черт рассматриваемого метода.

II. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ

Для того чтобы сделать наше изложение вполне самостоятельным, мы изложим те свойства нечетких множеств, которые понадобятся в дальнейшем. (Более подробное обсуждение положений теории нечетких множеств, имеющих отношение к данной теме, содержится в работах [1—17].)

Обозначения и терминология

Нечеткое подмножество A области рассуждений U характеризуется функцией принадлежности μA: $U \to [0, 1]$, которая каждому элементу y множества U ставит в соответствие число $\mu A(y)$ из отрезка $[0, 1]$, описывающее степень принадлежности элемента y множеству A. *Носитель* A есть множество элементов y, для которых $\mu_A(y)$ положительна. *Точкой перехода* A называется элемент y множества U, для которого $\mu A(y) = 0{,}5$. *Одноточечным нечетким* множеством называется множество, носитель которого состоит из единственной точки. Если A — одноточечное нечеткое множество, носителем которого является точка y, то мы будем писать

$$A = \mu/y, \tag{2.1}$$

где μ — степень принадлежности y множеству A. Определенное (четкое) одноточечное множество мы будем обозначать через $1/y$.

Нечеткое множество A можно рассматривать как объединение (см. (2.27)) составляющих его одноточечных множеств. Имея это в виду, множество A можно представить в следующем виде:

$$A = \int_U \mu_A(y)/y, \tag{2.2}$$

где символ интегрирования обозначает операцию объединения одноточечных нечетких множеств $\mu_A(y)/y$. Если носитель A состоит из конечного числа элементов, то интегрирование в (2.2) можно заменить суммированием:

$$A = \mu_1/y_1 + \cdots + \mu_n/y_n \tag{2.3}$$

или

$$A = \sum_{i=1}^{n} \mu_i/y_i, \tag{2.4}$$

где число μ_i $(i = 1, \ldots, n)$ — степень принадлежности элемента y_i множеству A. Заметим, что знак плюс в (2.3) обозначает объединение, а не арифметическое суммирование. Конечное полное множество $U = \{y_1, \ldots, y_n\}$ можно представить просто в виде суммы

$$U = y_1 + \cdots + y_n \tag{2.5}$$

или

$$U = \sum_{i=1}^{n} y_i, \tag{2.6}$$

хотя, строго говоря, выражения (2.5) и (2.6) следовало бы записать в виде

$$U = 1/y_1 + 1/y_2 + \cdots + 1/y_n \tag{2.7}$$

или

$$U = \sum_{i=1}^{n} 1/y_i. \tag{2.8}$$

Для примера предположим, что

$$U = 1 + 2 + \cdots + 10. \tag{2.9}$$

Тогда нечеткое подмножество [1] множества U, описываемое понятием *несколько*, можно записать в виде (символ $\triangleq$ обозначает равенство по определению)

---

[1] A есть подмножество B $(A \subset B)$ тогда и только тогда, когда $\mu_A(y) \leqslant \mu_B(y)$ для всех $y \in U$. Например, множество $A = 0{,}6/1 + 0{,}3/2$ является подмножеством множества $B = 0{,}8/1 + 0{,}5/2 + 0{,}6/3$.

$$\textit{несколько} \overset{\Delta}{=} 0{,}5/3 + 0{,}8/4 + 1/5 + 1/6 + \\ + 0{,}8/7 + 0{,}5/8. \quad (2.10)$$

Аналогично, если U — интервал $[0,\ 100]$ с элементами $y \overset{\Delta}{=}$ *возраст*, то нечеткие подмножества, описываемые понятиями «молодой» и «старый», можно представить в виде (здесь и ниже мы отождествляем нечеткое множество с понятием, которое его описывает)

$$\textit{молодой} = \int_0^{25} 1/y + \int_{25}^{100} \left(1 + \left(\frac{y-25}{5}\right)^2\right)^{-1} \Big/ y \quad (2.11)$$

$$\textit{старый} = \int_{50}^{100} \left(1 + \left(\frac{y-50}{5}\right)^{-2}\right)^{-1} \Big/ y \quad (2.12)$$

(см. рис. 1).

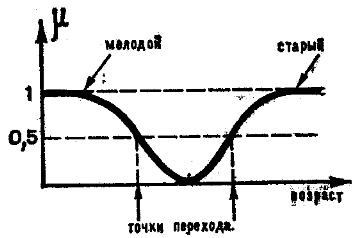


Рис. 1. Графическое представление слов *молодой* и *старый*.

Степень принадлежности к нечеткому множеству может сама представлять собой нечеткое множество. Так, например, если

$$U = \text{Том} + \text{Джим} + \text{Дик} + \text{Боб} \quad (2.13)$$

и A—нечеткое множество *проворный*, то можно написать

проворный = *средне*/Том + *мало*/Джим + *сильно*/Боб + + *мало*/Дик.

Нечеткие степени принадлежности *мало*, *средне* и *сильно* являются при этом нечеткими подмножествами полного множества V, определяемого следующим образом:

$$V = 0 + 0{,}1 + 0{,}2 + \cdots + 0{,}9 + 1. \quad (2.15)$$

Сами эти подмножества определяются так:

$$\textit{мало} = 0{,}5/0{,}2 + 0{,}7/0{,}3 + 1/0{,}4 + 0{,}7/0{,}5 + 0{,}5/0{,}6 \quad (2.16)$$

$$\textit{средне} = 0{,}5/0{,}4 + 0{,}7/0{,}5 + 1/0{,}6 + 0{,}7/0{,}7 + 0{,}5/0{,}8 \quad (2.17)$$

$$\textit{сильно} = 0{,}5/0{,}7 + 0{,}7/0{,}8 + 0{,}9/0{,}9 + 1/1. \quad (2.18)$$

Нечеткие отношения

Нечеткое отношение $R : X \to Y$ представляет собой нечеткое подмножество декартова произведения $X \times Y$. R следующим образом описывается с помощью функции принадлежности двух переменных:

$$R \overset{\Delta}{=} \int_{X \times Y} \mu_R(x, y)/(x, y). \quad (2.19)$$

Вообще, n-арное отношение есть нечеткое подмножество декартова произведения $X_1 \times \ldots \times X_n$, причем

$$R \overset{\Delta}{=} \int_{X_1 \times \cdots \times X_n} \mu_R(x_1, \ldots, x_n)/(x_1, \ldots, x_n), \quad (2.20)$$

$$x_i \in X_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Для примера предположим, что

$X = \{$Том, Дик$\}$, $Y = \{$Джон, Джим$\}$,

тогда бинарное нечеткое отношение *сходства* между элементами множеств X и Y можно записать в виде

сходство = 0,8/(Том, Джон)+0,6/(Том, Джим)+ +0,2/(Дик, Джон)+0,9/(Дик, Джим).

Помимо этого, данное отношение можно представить в виде *матрицы отношения*

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \text{Джон} & \text{Джим} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{Том} \\ \text{Дик} \end{array} & \begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}6 \\ 0{,}2 & 0{,}9 \end{bmatrix} \end{array}, \quad (2.21)$$

в которой (i, j)-й элемент равен значению функции $\mu_R(x, y)$ для i-го значения x и j-го значения y.

Если R — отношение $X \to Y$, а S — отношение $Y \to Z$, то *произведение* $R \circ S$ отношений R и S определяется следующим образом:

$$R \circ S \overset{\Delta}{=} \int_{X \times Z} \bigvee_y (\mu_R(x, y) \wedge \mu_S(y, z))/(x, \overset{z}{y}), \quad (2.22)$$

где знаки $\vee$ и $\wedge$ обозначают соответственно max и min [1].

[1] Выражение (2.22) определяет максиминное произведение R и S. Аналогично определяется и максимальное произведение с той разницей, что $\wedge$ заменяется арифметическим произведением. Более подробно эти произведения рассмотрены в работе [2].

Так, для действительных чисел a и b:

$$a \vee b = \max(a, b) \stackrel{\Delta}{=} \begin{cases} a, & \text{при } a \geqslant b \\ b, & \text{при } a < b, \end{cases} \quad (2.23)$$

$$a \wedge b = \min(a, b) \stackrel{\Delta}{=} \begin{cases} a, & \text{при } a \leqslant b \\ b, & \text{при } a > b, \end{cases} \quad (2.24)$$

а $\vee_y$ — верхняя грань по области значений y.

Если множества значений переменных x, y и z конечны, то матрица отношения $R \circ S$ равна максиминному произведению[1] матриц отношений R и S. Так, например, максиминное произведение матрицы отношений в левой части выражения (2.25) дает матрицу отношения $R \circ S$ в правой части равенства

$$\begin{bmatrix} 0{,}3 & 0{,}8 \\ 0{,}6 & 0{,}9 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}9 \\ 0{,}4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}4 & 0{,}8 \\ 0{,}5 & 0{,}9 \end{bmatrix}.$$

Операции с нечеткими множествами

Отрицание ***не***, союзы *и* и *или*, уклончивые понятия ***очень***, ***весьма***, ***больше***, ***меньше*** и другие термины, которые входят в определение значений лингвистических переменных, могут рассматриваться как символы различных операций, определенных на нечетких подмножествах U. Наиболее существенные из этих операций будут отмечены ниже.

Дополнение A обозначается через $\neg A$ и определяется как

$$\neg A \stackrel{\Delta}{=} \int_U (1 - \mu_A(y))/y. \quad (2.26)$$

Операция дополнения соответствует отрицанию. Таким образом, если x — символ нечеткого множества, то ***не*** x следует интерпретировать как $\neg x$ (точнее говоря, $\neg$ действует на нечеткие множества, тогда как *нет* действует на их символы; понимая это, мы будем использовать символы $\neg$ и ***не*** взаимозаменимо).

Объединение нечетких множеств A и B обозначается $A + B$ и определяется равенством

$$A + B \stackrel{\Delta}{=} \int_U (\mu_A(y) \vee \mu_B(y))/y. \quad (2.27)$$

Объединение соответствует союзу *или*. Таким образом, если u и v символы нечетких множеств, то

$$u \text{ или } v \stackrel{\Delta}{=} u + v. \quad (2.28)$$

Пересечение A и B обозначается $A \cap B$ и определяется равенством

$$A \cap B \stackrel{\Delta}{=} \int_U (\mu_A(y) \wedge \mu_B(y))/y. \quad (2.29)$$

Пересечение соответствует союзу *и*, таким образом,

$$u \text{ и } v \stackrel{\Delta}{=} u \cap v. \quad (2.30)$$

Пример. Пусть

$$V = 1 + 2 + \cdots + 10 \quad (2.31)$$

$$u = 0{,}8/3 + 1/5 + 0{,}6/6 \quad (2.32)$$

$$v = 0{,}7/3 + 1/4 + 0{,}5/6 \quad (2.33)$$

тог

$$u \text{ или } v = 0{,}8/3 + 1/4 + 1/5 + 0{,}6/6 \quad (2.34)$$

$$u \text{ и } v = 0{,}7/3 + 0{,}5/6. \quad (2.35)$$

Произведение A и B обозначается AB и определяется как

$$AB \stackrel{\Delta}{=} \int_U \mu_A(y)\,\mu_B(y)/y. \quad (2.36)$$

Таким образом, если

$$A = 0{,}8/2 + 0{,}9/5 \quad (2.37)$$

$$B = 0{,}6/2 + 0{,}8/3 + 0{,}6/5, \quad (2.38)$$

то

$$AB = 0{,}48/2 + 0{,}54/5. \quad (2.39)$$

Опираясь на (2.36), определим A^α $(\alpha > 0)$ как

$$A^\alpha \stackrel{\Delta}{=} \int_U (\mu_A(y))^\alpha/y. \quad 2(40)$$

Аналогично, если $\alpha \geqslant 0$, то

$$\alpha A \stackrel{\Delta}{=} \int_U \alpha\mu_A(y)/y. \quad (2.41)$$

[1] В максиминном произведении матриц вместо операций сложения и умножения используются операции $\vee$ и $\wedge$ соответственно.

В качестве иллюстрации, если A имеет вид (2.37), то

$$A^2 = 0{,}64/2 + 0{,}81/5. \tag{2.42}$$

$$0{,}5A = 0{,}4/2 + 0{,}45/5. \tag{2.43}$$

Кроме основных только что определенных операций, имеются и другие операции, которые используются в представлении лингвистических неопределенностей. Некоторые из них будут кратко определены (более подробное обсуждение этих операций можно найти в [15]).

Операция *концентрирования* определяется равенством

$$\mathrm{CON}(A) \stackrel{\Delta}{=} A^2. \tag{2.44}$$

В результате применения этой операции к множеству A уменьшаются степени принадлежности элементов этому множеству, причем для элементов с высокой степенью принадлежности это уменьшение относительно мало, а для элементов с малой степенью принадлежности — относительно велико.

Операция *растяжения* определяется как

$$\mathrm{DIL}(A) \stackrel{\Delta}{=} A^{0,5}. \tag{2.45}$$

Действие этой операции противоположно действию операции концентрирования.

Операция *контрастной интенсификации* определяется как

$$\mathrm{INT}(A) \stackrel{\Delta}{=} \begin{cases} 2A^2, & 0 \leqslant \mu_A(y) \leqslant 0{,}5 \\ \neg 2(\neg A)^2, & 0{,}5 \leqslant \mu_A(y) \leqslant 1. \end{cases} \tag{2.46}$$

Эта операция отличается от концентрирования тем, что она увеличивает значения $\mu_A(y)$, которые больше 0,5, и уменьшает те, которые меньше 0,5. Таким образом, контрастная интенсификация уменьшает нечеткость A (мера нечеткости множества, подобная энтропии, определена в [16]).

Операция *увеличения нечеткости* выражается в превращении обычного (четкого) множества в нечеткое или в увеличении степени нечеткости нечеткого множества. Результат применения этой операции к A будет обозначаться $F(A)$ или $\tilde{A}$. Так $x \approx 3$ означает ≪ x приблизительно равно 3≫, в то время как $x = \tilde{3}$ означает — ≪x есть нечеткое множество чисел, лежащих в окрестности числа 3≫. Операция

увеличения нечеткости F характеризуется *ядром* $K(y)$, которое представляет собой нечеткое множество, являющееся результатом применения F к одноэлементному множеству $1/y$.

$$K(y) \stackrel{\Delta}{=} 1/\tilde{y}. \tag{2.47}$$

В терминах K результат применения F к нечеткому множеству A дается равенством

$$F(A;\ K) \stackrel{\Delta}{=} \int_U \mu_A(y)\, K(y), \tag{2.48}$$

где $\mu_A(y)\, K(y)$ представляет собой произведение (в смысле (2.41)) скаляра $\mu_A(y)$ и нечеткого множества $K(y)$, а $\int_U$ следует интерпретировать как объединение семейства нечетких множеств $\mu_A(y)\, K(y)$, $y \in U$. Таким образом, (2.48) аналогично интегральному представлению линейного оператора с $K(y)$, играющим роль импульсной характеристики.

В качестве иллюстрации (2.48) предположим, что U, A и $K(y)$ определяются так:

$$U = 1 + 2 + 3 + 4, \tag{2.49}$$

$$A = 0{,}8/1 + 0{,}6/2, \tag{2.50}$$

$$\begin{aligned} K(1) &= 1/1 + 0{,}4/2, \\ K(2) &= 1/2 + 0{,}4/1 + 0{,}4/3. \end{aligned} \tag{2.51}$$

Тогда результат применения F к A имеет вид

$$\begin{aligned} F(A;\ K) &= 0{,}8(1/1 + 0{,}4/2) + 0{,}6(1/2 + 0{,}4/1 + 0{,}4/3) = \\ &= 0{,}8/1 + 0{,}32/2 + 0{,}6/2 + 0{,}24/1 + 0{,}24/3 = \\ &= 0{,}8/1 + 0{,}6/2 + 0{,}24/3. \end{aligned} \tag{2.52}$$

Операция увеличения нечеткости играет важную роль в определении лингвистических неопределенностей, таких, как *более* или *менее*, *слабо*, *много* и т. д. Примеры ее использования приводятся в [15].

Язык и значения лингвистических переменных

Как было указано в разделе I, значениями лингвистической переменной являются нечеткие множества, символами которых являются предложения в естественном или формальном языке. Для наших целей язык L можно рассматривать как соответствие между множеством терминов T и областью рассуждения U (эта точка зрения описана более детально в [4] и [5]; для простоты мы предполагаем, что T — определенное множество). Можно считать, что это соответствие характеризуется нечетким называющим *отношением* N из T в U, которое связывает с каждым термином x в T и каждым объектом y в U степень $\mu_N(x, y)$ применимости x к y. Например, если x=*молодой* и y =23 года, то μ_N (*молодой*, 23) может быть 0,9. Термин может быть элементарным, например, x = *высокий*, или составным, когда он является сочленением элементарных терминов, например, x = *очень высокий мужчина*.

Для фиксированного x функция принадлежности $\mu_N(x, y)$ определяет нечеткое подмножество $M(x)$ множества U, функция принадлежности которого задается как

$$\mu_{M(x)}(y) \overset{\Delta}{=} \mu_N(x, y), \quad x \in T, \quad y \in U. \tag{2.53}$$

Это нечеткое подмножество является по определению *значением* x. Таким образом, значение термина x есть нечеткое подмножество $M(x)$ из U, для которого x служит символом. Хотя x и $M(x)$ являются различными объектами (x есть элемент T, в то время как $M(x)$ — нечеткое подмножество U), мы будем писать x вместо $M(x)$, за исключением тех случаев, когда имеется необходимость их различать. Для иллюстрации предположим, что значение термина *молодой* определено посредством

$$\mu_N(\text{молодой}, y) = \begin{cases} 1, & \text{если } y \leqslant 25 \\ \left(1 + \left(\frac{y-25}{5}\right)^2\right)^{-1}, & \text{если } y > 25. \end{cases} \tag{2.54}$$

Тогда мы можем представить нечеткое подмножество U, обозначенное *молодой*, как равенство

$$\text{молодой} = \int_0^{25} 1/y + \int_{25}^{100} \left(1 + \left(\frac{y-25}{5}\right)^2\right)^{-1} / y, \tag{2.55}$$

где правая часть представляет значение термина *молодой*.

Лингвистические неопределенности типа *очень*, *много*, *больше*, *меньше* и т. д. дают возможность модифицировать значения элементарных и составных терминов и служат, таким образом, для увеличения области значений лингвистической переменной. Использование лингвистических неопределенностей для этой цели обсуждается в следующем разделе.

III. ЛИНГВИСТИЧЕСКИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Как установлено в разделе II, значения лингвистической переменной являются символами нечетких подмножеств U, которые представляют собой фразы или предложения в естественном или формальном языке. Например, если U есть набор целых чисел

$$U = 0 + 1 + 2 + \cdots + 100 \tag{3.1}$$

и *возраст* есть лингвистическая переменная, обозначенная x, то значениями x могут быть *молодой*, *не молодой*, *очень молодой*, *не очень молодой*, *старый*, *не старый*, *не очень старый* и т. д.

В общем случае значение лингвистической переменной есть составной термин $x = x_1 x_2 \ldots x_n$, который представляет собой сочетание элементарных терминов $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Эти элементарные термины можно разбить на четыре категории:

1) первичные термины, которые являются символами специальных нечетких подмножеств области рассуждения (например, *молодой* и *старый* в предыдущем примере);

2) отрицание *не* и союзы *и*, *или*;

3) *неопределенности* типа *очень*, *много*, *слабо*, *более или менее* (хотя *более или менее* содержит в себе три слова, оно рассматривается как элементарный термин) и т. д.;

4) *маркеры*, такие, как вводные слова.

Основная проблема P_l, которая возникает в связи с использованием лингвистических переменных, заключается в следующем: пусть дано значение каждого элементарного термина x_i, $i = 1, \ldots, n$, в составном термине $x = x_1 \ldots x_n$, который представляет собой значение лингвистической переменной, требуется вычислить значение x в смысле (2.53). Эта задача является частным случаем основной задачи в количественной неопределенной семантике [4], а именно, задачи вычисления значения составного термина. P_l есть частный случай предыдущей задачи, так как составные термины, представляющие значения лингвистической переменной, имеют сравнительно простую грамматическую структуру, которая ограничена четырьмя категориями элементарных терминов 1)—4).

В качестве введения в описание общего подхода к решению P_l будет полезно рассмотреть подзадачу P_l, которая состоит в вычислении значения составного термина в виде $x = hu$, где h — неопределенность, а u — термин с фиксированным значением, например, x = *очень высокий человек*, где h = *очень*, а u = *высокий человек*.

Принимая точку зрения, описанную в работе [15], неопределенность h можно рассматривать как оператор, который переводит нечеткое множество $M(u)$, представляющее значение u, в нечеткое множество $M(hu)$. Как уже говорилось выше, неопределенности выполняют функцию генерации большого множества значений для лингвистической переменной из небольшого набора первичных терминов. Например, использованием неопределенности *очень* в сочетании с *нет*, *и* и первичным термином *высокий* мы можем генерировать нечеткие множества *очень высокий*, *не очень высокий* и т. д. Для определения *неопределенности* h как оператора удобно использовать некоторые основные операции, определенные в разделе II, особенно операции концентрации, растяжения и увеличения нечеткости. В последующем мы укажем, как это можно сделать для естественной неопределенности *очень* и искусственных неопределенностей *плюс* и *минус*. Характеристики таких неопределенностей, как *больше*, *меньше*, *много*, *слабо*, *вроде*, *вполне* можно найти в работе [15].

Хотя в повседневном использовании неопределенность *очень* не имеет четко определенного значения, в сущности она действует как усилитель, генерируя подмножество того множества, к которому она применяется. Простая операция, которая имеет это свойство, — операция концентрации (см. (2.44). Это наводит на мысль о том, что *очень* x, где x — термин, должно быть определено как квадрат x, т. е.

$$\text{очень } x \overset{\Delta}{=} x^2 \qquad (3.2)$$

или более определенно

$$\text{очень } x \overset{\Delta}{=} \int_U \mu_x^2(y)/y. \qquad (3.3)$$

Например, если (см. рис. 2)

$$x = \text{старые люди} \ \overset{\Delta}{=} \int_{50}^{100} \left(1 + \left(\frac{y-50}{5}\right)^{-2}\right)^{-1} \Big/ y, \qquad (3.4)$$

то

$$x^2 = \text{очень старые люди} \ \overset{\Delta}{=} \int_{50}^{100} \left(1 + \left(\frac{y-50}{5}\right)^{-2}\right)^{-2} \Big/ y. \qquad (3.5)$$

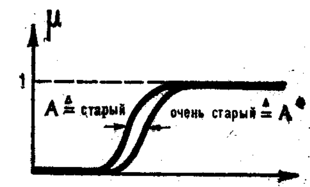


Рис. 2 Влияние неопределенного термина *очень*.

Таким образом, если степень принадлежности Джона к классу *старых людей* есть 0,8, то его степень принадлежности к классу *очень старых людей* есть 0,64. Другой простой пример:

$$U = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 \qquad (3.6)$$

и

$$\text{маленький} = 1/1 + 0{,}8/2 + 0{,}6/3 + 0{,}4/4 + 0{,}2/5, \qquad (3.7)$$

то

$$\text{очень маленький} = 1/1 + 0{,}64/2 + 0{,}36/3 + 0{,}16/4 + 0{,}04/5. \qquad (3.8)$$

Рассматриваемый как оператор, *очень* может сочетаться с самим собой. Так

$$\text{очень очень } x = (\text{очень } x)^2 = x^4. \qquad (3.9)$$

Например, применяя (3.9) к (3.7), получаем (отбрасывая малые члены)

$$\text{очень очень маленький} = 1/1 + 0{,}4/2 + 0{,}1/3. \qquad (3.10)$$

В некоторых случаях для определения оператора *очень* мы должны использовать вводные слова или заменять составной термин элементарным. Например, неграмотно писать

$$x = \text{очень не точно}, \qquad (3.11)$$

но если *не точно* заменено элементарным термином *неточно*, то

$$x = \textit{очень неточно} \qquad (3.12)$$

грамматически правильно и мы можем писать

$$x = (\neg\ \textit{точно})^2. \qquad (3.13)$$

Заметим, что

$$\textit{не очень точно} = \neg\ (\textit{очень точно}) = \neg\ (\textit{точно})^2 \qquad (3.14)$$

не то же самое, что (3.13).

Искусственные неопределенности *плюс* и *минус* служат для придания более слабых степеней концентрации и растяжения, чем те, которые связаны с операциями CON и DIL (см. (2.44), (2.45)). Таким образом, как операторы, действующие на нечетком множестве, обозначенном x, *плюс* и *минус* определяются посредством

$$\textit{плюс } x \stackrel{\Delta}{=} x^{1,25} \qquad (3.15)$$

$$\textit{минус } x \stackrel{\Delta}{=} x^{0,75}. \qquad (3.16)$$

Вследствие (3.15) и (3.16) мы имеем приблизительное тождество

$$\textit{плюс плюс } x = \textit{минус очень } x. \qquad (3.17)$$

В качестве иллюстрации, если неопределенность *в высшей степени* определена как

$$\textit{в высшей степени} = \textit{минус очень очень}, \qquad (3.18)$$

то это равенство эквивалентно следующему

$$\textit{в высшей степени} = \textit{плюс плюс очень}. \qquad (3.19)$$

Как мы установили ранее, вычисление значения составных терминов вида hu есть введение к задаче вычисления значений лингвистической переменной. Теперь мы в состоянии обратиться к этой задаче.

IV. ВЫЧИСЛЕНИЕ ЗНАЧЕНИЙ ЛИНГВИСТИЧЕСКОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Если мы знаем, как вычислять значение составного термина вида hu, вычисление значения более сложного составного термина, который может включать термины *не*, *или*, *и* в дополнение к терминам вида hu, становится сравнительно простой задачей, совершенно сходной с задачей вычисления значения булевского выражения. В качестве простой иллюстрации рассмотрим вычисление значений составного термина

$$x = \textit{не очень маленький}, \qquad (4.1)$$

где первичный термин *маленький* определен как

$$\textit{маленький} = 1/1 + 0{,}8/2 + 0{,}6/3 + 0{,}4/4 + 0{,}2/5 \qquad (4.2)$$

с областью рассуждений

$$U = 1 + 2 + 3 + 4 + 5. \qquad (4.3)$$

Вследствие (3.8) применение операций *очень* к множеству *маленький* дает

$$\textit{очень маленький} = 1/1 + 0{,}64/2 + 0{,}36/3 + 0{,}16/4 + 0{,}04/5 \qquad (4.4)$$

и, учитывая (2.26), получаем

$$\textit{не очень маленький} = \neg\ (\textit{очень маленький}) = = 0{,}36/2 + 0{,}64/3 + 0{,}84/4 + 0{,}96/5 \approx \approx 0{,}4/2 + 0{,}6/3 + 0{,}8/4 + 1/5. \qquad (4.5)$$

В качестве несколько более сложного примера рассмотрим составной термин

$$x = \textit{не очень маленький и не очень большой}. \qquad (4.7)$$

В этом случае

$$\textit{очень большой} = (\textit{большой})^2 = = 0{,}04/1 + 0{,}16/2 + 0{,}36/3 + 0{,}64/4 + 1/5 \qquad (4.8)$$

$$\textit{очень очень большой} = (\textit{большой}^2)^2 \approx \approx 0{,}1/3 + 0{,}4/4 + 1/5 \qquad (4.9)$$

$$\textit{не очень очень большой} \approx 1/1 + 1/2 + 0{,}9/3 + 0{,}6/4 \qquad (4.10)$$

и, следовательно,

очень

$$\textit{не очень маленький и не очень большой} \approx \approx (0{,}4/2 + 0{,}6/3 + 0{,}8/4 + 1/5) \cap (1/1 + 1/2 + 0{,}9/3 + + 0{,}6/4) \approx 0{,}4/2 + 0{,}6/3 + 0{,}6/4. \qquad (4.11)$$

Значения лингвистической переменной, обозначенной *сходство*, дают пример другого рода. В этом случае мы предполагаем, что область рассуждений есть

$$U = 0 + 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}3 + 0{,}4 + 0{,}5 + 0{,}6 + \\ + 0{,}7 + 0{,}8 + 0{,}9 + 1, \tag{4.12}$$

где элементы U представляют вероятности. Предположим, что мы хотим вычислить значение

$$x = \textit{в высшей степени не похоже}, \tag{4.13}$$

где *в высшей степени* определено как (см. (3.18))

$$\textit{в высшей степени} = \textit{минус очень очень} \tag{4.14}$$

и

$$\textit{непохоже} = \textit{не похоже} \tag{4.15}$$

со значением первичного термина *похоже*, заданного в виде

$$\textit{похоже} = 1/1 + 1/0{,}9 + 1/0{,}8 + 0{,}8/0{,}7 + \\ + 0{,}6/0{,}6 + 0{,}5/0{,}5 + 0{,}3/0{,}4 + 0{,}2/0{,}3. \tag{4.16}$$

Используя (4.15), получаем

$$\textit{непохоже} = 1/0 + 1/0{,}1 + 1/0{,}2 + 0{,}8/0{,}3 + \\ + 0{,}7/0{,}4 + 0{,}5/0{,}5 + 0{,}4/0{,}6 + 0{,}2/0{,}7 \tag{4.17}$$

и, следовательно,

$$\textit{очень очень не похоже} = (\textit{не похоже})^4 \approx \\ \approx 1/0 + 1/0{,}1 + 1/0{,}2 + 0{,}4/03 + 0{,}2/0{,}4. \tag{4.18}$$

Наконец, из (4.14) получаем:

$$\textit{в высшей степени не похоже} = \textit{минус очень очень не похоже} \approx (1/0 + 1/0{,}1 + 1/0{,}2 + 0{,}4/0{,}3 + 0{,}2/0{,}4)^{0,75} \approx \\ \approx 1/0 + 1/0{,}1 + 1/0{,}2 + 0{,}5/0{,}3 + 0{,}3/0{,}4. \tag{4.19}$$

Следует заметить, что при вычислении значения составного термина в предыдущих примерах мы использовали обычные правила предшествования, действующие при преобразовании булевских выражений. С добавлением неопределенностей эти правила предшествования можно выразить следующим образом:

Предшествование	Операция
Первое	*h*, *не*
Второе	*и*
Третье	*или*

Как обычно, для изменения порядка предшествования можно использовать скобки и разрешать неопределенности путем объединения членов справа. Так, *плюс очень минус очень высокий* следует интерпретировать как

плюс (*очень* (*минус* (*очень* (*высокий*)))).

Техника, которую мы использовали для вычисления значений составного термина, есть частный случай более общего подхода, который описан в [4] и [5]. Рассматриваемый подход можно применять к вычислению значений лингвистической переменной, при условии, что составные термины, представляющие эти значения, могут быть генерированы лишенной контекста грамматикой. В качестве иллюстрации рассмотрим лингвистическую переменную x, значения которой представлены списком: *маленький*, *не маленький*, *большой*, *не большой*, *очень маленький*, *не очень маленький*, *маленький или не очень очень большой*, *маленький и* (*большой или не маленький*), *не очень очень маленький и не очень очень большой* и т. д.

Рассматриваемые значения могут быть генерированы лишенной контекста грамматикой $G = (V_T, V_N, S, P)$, в которой множество конечных слов V_T включает элементарные термины *маленький*, *большой*, *не*, *и*, *или*, *очень* и т. д.; не окончательные слова обозначаются S, A, B, C, D, E; результирующая система имеет вид

$$\begin{array}{ll} S \to A & C \to D \\ S \to S \text{ или } A & C \to E \\ A \to B & D \to \text{очень } D \\ A \to A \text{ и } B & E \to \text{очень } E \\ B \to C & D \to \text{маленький} \\ B \to \text{не } C & E \to \text{большой} \\ C \to (S). & \end{array} \tag{4.20}$$

Каждое правило вывода в (4.20) порождает отношение между нечеткими множествами, обозначенными соответственно терминальным и нетерминальным символами. В случае (4.20) эти отношения таковы (мы опускаем правила вывода, которые не оказывают влияния на соответствующие множества):

$$S \to S \text{ или } A \Rightarrow S_L = S_R + A_R$$

$$A \to A \text{ и } B \Rightarrow A_L = A_R \cap B_R$$

$$
\begin{aligned}
&B \to \textit{не}\ C \Rightarrow B_L = \neg C_R\\
&D \to \textit{очень}\ D \Rightarrow D_L = D_R^2\\
&E \to \textit{очень}\ E \Rightarrow E_L = E_R^2\\
&D \to \textit{малое} \Rightarrow D_L = \textit{малый}\\
&E \to \textit{большой} \Rightarrow E_L = \textit{большой}.
\end{aligned}
\tag{4.21}
$$

Нижние индексы L и R используются здесь для того, чтобы различать символы, стоящие в левой и правой частях.

Чтобы вычислить значения составного термина x, необходимо провести синтаксический анализ x в терминах определенной грамматики G. Тогда, зная синтаксическое дерево x, можно использовать соотношения (4.21) для вывода системы уравнений (в треугольной форме), решением которой является значение x. Например, в случае, когда составной термин

$$x = \textit{не очень малый и не очень очень большой},$$

решение этих уравнений дает

$$x = (\neg\ \textit{малый}^2) \cap (\neg\ \textit{большой}^4), \tag{4.22}$$

что согласуется с (4.11).

Возможность определять смысл значений, принимаемых лингвистической переменной, необходима для анализа нечетких высказываний вида «если A тогда B», например, «если x — *не очень малый*, тогда y — *очень очень большой*». Об этом говорится в следующем разделе.

V. НЕЧЕТКИЕ УСЛОВНЫЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ И СОСТАВНОЕ ПРАВИЛО ВЫВОДА

В классической теории исчисления высказываний выражение «если A, тогда B», где A и B — пропозициональные переменные, записывается как $A \Rightarrow B$, где импликация $\Rightarrow$ рассматривается как связка, смысл которой определяется таблицей истинности.

A	B	$A \Rightarrow B$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	И
Л	Л	И

Таким образом,

$$A \Rightarrow B \equiv \neg A \vee B \tag{5.1}$$

в том смысле, что высказывания $A \Rightarrow B$ (A влечет B) и $\neg A \vee B$(*не A или B*) имеют идентичные таблицы истинности. Более общим, важным в нашем подходе является *неопределенное высказывание* «если A, тогда B», коротко $A \Rightarrow B$, в котором A (антецедент) и B (консеквент) — нечеткие множества, а не пропозициональные переменные. Вот типичные примеры таких высказываний:

если *большой*, тогда *малый*,

если *скользкий*, тогда *опасный*;

они являются сокращениями предложений:

если x — большой, тогда y — малый,

если дорога *скользкая*, тогда езда *опасна*.

В сущности, предложения этого вида описывают отношения между двумя неопределенными переменными. Это означает, что неопределенное высказывание следует скорее определять как нечеткое отношение в смысле (2.19), а не как связку в смысле (5.1).

Здесь целесообразно определить сначала *декартово произведение* двух нечетких множеств. Пусть A — нечеткое подмножество области рассуждения U и пусть B — нечеткое подмножество другой, вообще говоря, области рассуждения V. Тогда декартово произведение A и B, обозначаемое $A \times B$, определяется следующим образом:

$$A \times B \stackrel{\Delta}{=} \int_{U \times V} \mu_A(u) \wedge \mu_B(v)/(u, v), \tag{5.2}$$

где $U \times V$ означает декартово произведение нечетких множеств U и V, т. е.:

$$U \times V \stackrel{\Delta}{=} \{(u, v)/u \in U, \quad v \in V\}.$$

Заметим, что когда A и B — не нечеткие, (5.2) преобразовывается в обычное определение декартова произведения множеств. Иными словами, (5.2) означает, что $A \times B$ нечеткое множество упорядоченных пар (u, v), $u \in U$, $v \in V$, со степенью принадлежности (u, v) и $(A \times B)$, задаваемой формулой $\mu_A(u) \wedge \mu_B(v)$. В этом смысле $A \times B$ есть нечеткое отношение U к V.

Рассмотрим очень простой пример. Пусть

$$U = 1 + 2 \quad (5.3)$$

$$V = 1 + 2 + 3 \quad (5.4)$$

$$A = 1/1 + 0{,}8/2 \quad (5.5)$$

$$B = 0{,}6/1 + 0{,}9/2 + 1/3. \quad (5.6)$$

Тогда

$$A \times B = 0{,}6/(1{,}1) + 0{,}9/(1{,}2) + 1/(1{,}3) + \\ + 0{,}6/(2{,}1) + 0{,}8/(2{,}2) + 0{,}8/(2{,}3). \quad (5.7)$$

Отношение, определенное в (5.7), можно представить матрицей отношения

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} & \begin{bmatrix} 0{,}6 & 0{,}9 & 1 \\ 0{,}6 & 0{,}8 & 0{,}8 \end{bmatrix} \end{array}. \quad (5.8)$$

Смысл нечеткого высказывания вида «если A, тогда B» становится ясен, если рассматривать его как специальный случай условного высказывания «если A, тогда B, иначе C», где и A и (B и C) — нечеткие подмножества, возможно, различных областей U и V, соответственно. В терминах декартова произведения последнее предложение определяется так:

$$\text{если } A, \text{ тогда } B, \text{ иначе } C \overset{\triangle}{=} A \times B + (\neg A \times C), \quad (5.9)$$

где $+$ означает объединение нечетких множеств $A \times B$ и $(\neg A \times C)$.

Вообще, если $A_1, \ldots, A_n$ — нечеткие подмножества U, а $B_1, \ldots, B_n$ — нечеткие подмножества из V, тогда

$$\text{если } A_1, \text{ тогда } B_1, \text{ иначе, если } A_2, \text{ тогда } B_2 \ldots$$

$$\text{иначе, если } A_n, \text{ тогда } B_n \overset{\triangle}{=} A_1 \times B_1 + \\ + A_2 \times B_2 + \cdots + A_n \times B_n. \quad (5.10)$$

Заметим, что (5.10) переходит в (5.9), если предложение «если A тогда B, иначе C» интерпретировать как «если A, тогда B, иначе если $\neg A$, тогда C». Следует также отметить, что, применяя (5.9) повторно, мы получим

$$\text{если } A, \text{ тогда (если } B, \text{ тогда } C, \text{ иначе } D) \\ \text{иначе } E = A \times B \times C + A \times \neg B \times D + \neg A \times E. \quad (5.11)$$

Если высказывание «если A, тогда B» рассматривать как высказывание «если A, тогда B, иначе C» с неопределенным C, тогда получаются различные интерпретации этого предложения в зависимости от предложений относительно C. В частности, если мы предположим, что $C = V$, тогда «если A, тогда B (или $A \Rightarrow B$)» переходит в

$$A \Rightarrow B \overset{\triangle}{=} \text{если } A, \text{ тогда } B \overset{\triangle}{=} A \times B + (\neg A \times V). \quad (5.12)$$

Если в (5.12) дополнительно положить $A = U$, мы получим еще одно определение

$$A \Rightarrow B \overset{\triangle}{=} U \times B + (\neg A \times V). \quad (5.13)$$

Впоследствии мы будем предполагать, что $C = V$ и, следовательно, что $A \Rightarrow B$ определяется по (5.12). Действительно, предположение о том, что $C = V$ означает, что в отсутствие указания к противному $\neg A \Rightarrow C$ может соответствовать любому нечеткому подмножеству области рассуждения. В качестве очень простой иллюстрации (5.12) предположим, что A и B определены согласно (5.5) и (5.6). Тогда, подставляя (5.8) в (5.12), находим, что матрица отношения $A \Rightarrow B$ имеет вид:

$$A \Rightarrow B = \begin{bmatrix} 0{,}6 & 0{,}9 & 1 \\ 0{,}6 & 0{,}8 & 0{,}8 \end{bmatrix}.$$

Следует отметить, что, когда A, B и C — не нечеткие множества, мы имеем равенство

$$\text{если } A, \text{ тогда } B, \text{ иначе } C = (\text{если } A, \text{ тогда } B) \cap \\ \cap (\text{если } \neg A, \text{ тогда } C), \quad (5.14)$$

которое для нечетких множеств A, B и C справедливо лишь приближенно. Это говорит о том, что в соответствии с (5.15) определения высказывания «если A, тогда B, иначе C» и «если A, тогда B» с помощью (5.9) и (5.12) не совсем подходят для нечетких A, B и C. Следует также отметить, что если 1) $U = V$, 2) $x = y$ и 3) $A \Rightarrow B$ справедливы для всех элементов U, тогда из (5.12) имеем, что

$$A \Rightarrow B \text{ имеет следствием и является следствием } A \subset B \quad (5.15)$$

строго, если A и B — не нечеткие, и приближенно, если нечеткие.

Как будет показано в разделе VI, нечеткие высказывания играют основную роль в нечетких алгоритмах. Более конкретно, типичная проблема, с которой сталкиваются при разработке таких алгоритмов, состоит в следующем. Имеется нечеткое отношение, скажем, $R: U \to V$, которое определяется нечеткими высказываниями. Проблема состоит в том, чтобы для любого нечеткого подмножества $x \in U$ определить нечеткое подмножество $y \in V$, которое x индуцирует в V. Например, пусть имеются следующие два предложения:

1) x — *очень малый*,

2) если x — ~~*очень*~~ *малый*, тогда y — *большой*, иначе y *не очень большой*,

из которых второе определяет согласно (5.9) неопределенное отношение R. Возникает вопрос: какова будет величина y, если x очень мал? Ответ на этот вопрос дается следующим правилом вывода, которое можно рассматривать как обобщение известного правила modus ponens.

Составное правило вывода: если R — неопределенное отношение $U \leftrightarrow V$ и x — неопределенное подмножество U, тогда неопределенное подмножество $y \subset V$, которое индуцируется подмножеством x, дается композицией (см. (2.22)) R и x, т. е.

$$y = x \circ R, \tag{5.16}$$

где x играет роль унарного отношения.

В качестве простой иллюстрации (5.16) допустим, что R и x определяются матрицами отношений (5.17). Тогда y дается максиминным произведением x и R:

$$\overset{x}{[0{,}2\ \ 1\ \ 0{,}3]} \circ \overset{R}{\begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}9 & 0{,}2 \\ 0{,}6 & 1 & 0{,}4 \\ 0{,}5 & 0{,}8 & 1 \end{bmatrix}} = \overset{y}{[0{,}6\ \ 1\ \ 0{,}4]}. \tag{5.17}$$

Что касается поставленного выше вопроса, положим, что

$$U = 1 + 2 + 3 + 4 + 5, \tag{5.18}$$

где *малый* и *большой* определены по (4.2) и (4.7) соответственно. Тогда, подставляя в (5.9) *малый* вместо A, *большой* вместо B и *не очень большой* вместо C, мы получим матрицу отношения R для неопределенного высказывания «если *малый*, тогда *большой*, иначе *не очень большой*». Результат композиции R с x = *очень малый* есть

$$\overset{x}{[1\ \ 0{,}64\ \ 0{,}36\ \ 0{,}16\ \ 0{,}04]} \circ \overset{R}{\begin{bmatrix} 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}6 & 0{,}8 & 1 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}6 & 0{,}8 & 1 \\ 0{,}4 & 0{,}4 & 0{,}6 & 0{,}6 & 0{,}6 \\ 0{,}6 & 0{,}6 & 0{,}6 & 0{,}4 & 0{,}4 \\ 0{,}8 & 0{,}8 & 0{,}64 & 0{,}36 & 0{,}2 \end{bmatrix}} =$$

$$= \overset{y}{[0{,}36\ \ 0{,}4\ \ 0{,}6\ \ 0{,}8\ \ 1]} \tag{5.19}$$

Сделаем несколько замечаний относительно (5.16). Во-первых, следует отметить, что когда $R = A \Rightarrow B$ и $x = A$, мы получим

$$y = A \circ (A \Rightarrow B) = B, \tag{5.20}$$

что строго выполняется, когда A, B и C — обычные множества, и приближенно, когда A, B и C — нечеткие множества. Именно в этом смысле составное правило вывода можно рассматривать как приближенное обобщение правила modus ponens (заметим, что вследствие того, каким образом $A \Rightarrow B$ определено в (5.12), чем больше x отличается от A, тем менее четко определен y).

Во-вторых, выражение (5.16) аналогично маргинальной вероятности в терминах функции условной вероятности, т.е.

$$r_j = \sum_i q_j p_{ji}, \tag{5.21}$$

где

$$q_i = \text{Вер}\ \{X = x_i\}$$
$$r_j = \text{Вер}\ \{Y = y_i\}$$
$$P_{ij} = \text{Вер}\ \{Y = y_j | X = x_i\},$$

X и Y — случайные переменные со значениями $x_1, x_2, \ldots$ и $y_1, y_2, \ldots$ соответственно. Однако эта аналогия не означает, что (5.16) есть отношение между вероятностями.

В-третьих, следует отметить, что из-за использования максиминного произведения матриц в (5.16) отношение между x и y не непрерывно. Таким образом, вообще говоря, малое изменение x не произведет изменения в y, пока не будет превышен некий порог. Этого не будет в случае, если композиция x и R определена с помощью max-произведения.

В-четвертых, при вычислении $x \circ R$ можно использовать дистрибутивность композиции относительно объединения нечетких множеств. Таким образом, если

$$x = u \text{ или } v, \tag{5.22}$$

где u и v — элементы нечетких множеств, тогда

$$(u \text{ или } v) \circ R = u \circ R \text{ или } v \circ R. \tag{5.23}$$

Например, если x — *малый или средний*, и $R = A \Rightarrow B$ означает если x *не мал и не большой*, тогда y — *очень малый*, то можно писать:

(*малый или средний*) ⊙ (*не малый и не большой⇒очень малый*) = *малый* ○ (*не малый и не большой⇒очень малый*) *или средний* (*не малый и не большой⇒очень малый*).

Последнее замечание: важно осознавать, что в практических применениях нечетких высказываний для описания сложных или плохо определенных отношений вычисления (5.9), (5.10) и (5.16) будут, вообще говоря, выполнены в большой степени приближенно. Более того, дополнительный источник неточности связан с представлением нечеткого множества как значения лингвистической переменной. Предположим, например, что отношение между нечеткими переменными x и y описывается неопределенным высказыванием «если *малый*, тогда *большой*, иначе, если *средний*, тогда *средний*, иначе, если *большой*, тогда *очень малый*».

Обычно мы приписываем переменной x различные лингвистические значения и вычисляем соответствующие значения y, используя (5.16). Тогда, приближая значения переменной лингвистическими символами, мы приходим к следующей таблице:

ДАНО		ВЫВОД	
A	*B*	*x*	*y*
малый *средний* *большой*	*большой* *средний* *очень малый*	*не малый* *очень малый* *очень очень малый* *не очень большой*	*не очень большой* *очень очень большой* *очень очень большой* *малый или средний*

Эта таблица дает приближенно лингвистическую характеристику отношения между x и y, которая вытекает из данного нечеткого высказывания. Как уже говорилось

ранее, нечеткие высказывания играют основную роль в описании и реализации нечетких алгоритмов. Об этом пойдет речь в следующем разделе.

VI. НЕЧЕТКИЕ АЛГОРИТМЫ

Грубо говоря, нечеткий алгоритм есть упорядоченное множество нечетких инструкций, которые при их реализации дают приближенное решение проблемы. В той или иной форме нечеткие алгоритмы присутствуют во многих наших рассмотрениях. Так, мы используем нечеткие алгоритмы сознательно или бессознательно, когда идем пешком, водим машину, ищем предмет, завязываем узел, готовим обед, ищем номер в телефонной книге и т. д. Более того, по существу, эти алгоритмы широко используются в программировании, исследовании операций, психологии, науке управления и медицинской диагностике. Понятия нечеткого множества и, в частности, нечеткого высказывания создает базис для использования нечетких алгоритмов более систематическим и, следовательно, более эффективным образом, чем это было возможно ранее. Так, нечеткие алгоритмы могут стать важным инструментом для приближенного анализа систем и процессов принятия решений, которые слишком сложны для применения обычной математической техники.

Формальную характеристику понятия нечеткого алгоритма можно дать с помощью понятия нечетких машин Тьюринга или нечеткого марковского алгоритма [6]—[8]. В этом разделе главная цель обсуждения состоит в том, чтобы связать понятие нечеткого алгоритма с понятиями, введенными в предыдущих разделах, и проиллюстрировать простыми примерами некоторые применения таких алгоритмов.

Инструкции в нечетких алгоритмах можно разделить на три класса:

1) *Назначающие предложения*, например,
$x \approx 5$
x = *малый*
x = *большой*
x = *не большой и не очень малый*

2) *Нечеткие высказывания*, например,
«если x — *малый*, тогда y — *большой*, иначе y — не большой»,

«если x — положительный, тогда уменьшить y *незначительно*»,

«если x — *много больше* 5, тогда стоп»,

«если x — *очень малый*, тогда идти к 7».

Заметим, что в таких предложениях либо предыдущий член отношений, либо предшествующий, либо оба могут быть символами нечетких множеств.

3) *Безусловные активные предложения*, например,

умножить x на x

уменьшить x *слегка*

стереть *несколько* первых появившихся единиц

идти к 7

печать x

стоп.

Отметим, что некоторые из этих инструкций являются нечеткими, а некоторые — нет.

Комбинировать назначающее и нечеткое высказывания нужно в соответствии с композиционным правилом (5.16). Например, если в некоторый момент выполнения нечеткого алгоритма мы встречаем инструкции

1) x = *очень маленький*

2) «если x *маленький*, тогда y — *большой*, иначе y *не очень большой*»,

где *маленький* и *большой* определяются согласно (4.2) и (4.7), тогда результатом выполнения инструкций 1) и 2) будет значение y, данное согласно (5.19), т. е.

$$y = 0{,}36/1 + 0{,}4/2 + 0{,}64/3 + 0{,}8/4 + 1/5. \qquad (6.1)$$

Безусловная, но нечеткая инструкция выполняется аналогично. Например, выполнение инструкции

«умножить x само на себя *несколько* раз», (6.2)

где слово *несколько* определено равенством

$$\textit{несколько} = 1/1 + 0{,}8/2 + 0{,}6/3 + 0{,}4/4, \qquad (6.3)$$

даст нечеткое множество

$$y = 1/x^2 + 0{,}8/x^3 + 0{,}6/x^4 + 0{,}4/x^5; \qquad (6.4)$$

Важно отметить, что как в (6.1), так и в (6.4) результатом выполнения инструкции является нечеткое множество, а не единственное число. Однако когда человек дает нечеткую инструкцию, такую, как «сделать *несколько* шагов», где *несколько* определено так:

$$\textit{несколько} = 0{,}5/3 + 0{,}8/4 + 1/5 + 1/6 + 0{,}8/7 + 0{,}5/8, \qquad (6{,}5)$$

то результат выполнения должен быть единственным числом в интервале между 3 и 8. На какой основе выбирается такое число? Как указано в [6], разумно допустить, что результатом выполнения будет элемент нечеткого множества, имеющий наивысшую степень принадлежности этому множеству. Если такой элемент не единствен, как в (6.5), тогда можно сделать случайный или произвольный выбор среди элементов, имеющих наивысшую степень принадлежности множеству. Можно также ввести некий критерий, согласно которому линейно упорядочиваются элементы нечеткого множества, имеющие наивысшую степень принадлежности этому множеству, и, таким образом, образуется единственный наибольший элемент. Например, в случае (6.5), если ввести критерий минимизации числа шагов, то из всех элементов с наивысшей степенью принадлежности множеству будет выбрано наименьшее число 5.

Аналогичный вопрос возникает в ситуации, когда испытуемый должен ответить «да» или «нет» на нечеткий вопрос. Например, предположим, что испытуемому предложена инструкция

«если x — *мало*, тогда стоп, иначе идти на 7», (6.6)

в которой *мало* определяется по (4.2). Теперь предположим, что $x = 3$, причем это число имеет степень принадлежности множеству *малый*, равную 0,6. Должен ли человек выполнить «стоп» или «идти на 7»? Мы будем допускать, что в подобных ситуациях человек сделает выбор «более истинный», например, «x — *мало*» предпочтительнее «x — *не мало*», так как в нашем случае степень истинности предложения «3 — *мало*» равна 0,6, что больше степени истинности утверждения «3 — *не мало*». Если обе альтернативы имеют более или менее равные значения истинности, выбор может быть сделан произвольно. Для удобства мы будем называть это правило выбора одной из двух альтернатив *правилом преобладающей альтернативы*.

Очень важно понять, что только что рассмотренные вопросы возникают лишь в тех ситуациях, в которых требуется, чтобы результат выполнения нечеткой инструкции являлся единственным элементом (например, числом), а не нечетким множеством. Таким образом, если разрешается, чтобы результат выполнения (6.6) был нечетким, тогда для $x = 3$ мы получим нечеткое множество вида

0,6/стоп + 0,4/идти к 7,

которое означает, что операции должны выполняться параллельно. Допущение такого параллелизма неявно присутствует в составном правиле вывода и играет основную роль в понимании нечетких алгоритмов и их выполнения людьми и машинами.

Далее мы покажем несколько примеров нечетких алгоритмов в свете концепций, рассмотренных в предыдущих параграфах. Следует подчеркнуть, что эти примеры иллюстрируют лишь основные аспекты нечетких алгоритмов и не демонстрируют их эффективность в решении практических проблем.

Нечеткие алгоритмы удобно классифицировать соответственно областям их применения: алгоритмы определения и идентификации; бихевиористические алгоритмы; алгоритмы принятия решений. (Следует отметить, что алгоритм определенного типа может включать в себя алгоритмы других типов как подалгоритмы. Например, алгоритм определения может включать в себя подалгоритмы отношения и принятия решения.) Мы начнем с примера алгоритма определения.

Нечеткие алгоритмы определения

Одна из основных областей применения нечетких алгоритмов — определение сложных, плохо определенных или нечетких понятий в терминах более простых или менее нечетких понятий. Вот примеры таких нечетких понятий: характеры почерка; меры сложности; меры похожести; неопределенные болезни (артрит, артериосклероз) и т. д.

Поскольку нечеткое понятие можно рассматривать как символ нечеткого множества, *нечеткий алгоритм определения* является в действительности конечным множеством возможно нечетких инструкций, которые определяют нечеткое множество в терминах других нечетких множеств (и, возможно, самого себя, т. е. рекурсивно) или дают процедуру для вычисления степени принадлежности каждого элемента области рассуждений определяемому множеству. В последнем случае алгоритм определения играет роль *алгоритма идентификации*, т. е. алгоритма, который устанавливает, принадлежит или нет элемент множеству, или, более обще,— устанавливает его степень принадлежности. Пример такого алгоритма дается процедурой (см. [5]) вычисления степени принадлежности ряда (предложения) в нечетком языке, порожденном лишенной контекста грамматикой.

В качестве очень простого примера нечеткого алгоритма определения рассмотрим нечеткое понятие *овал*. Вновь следует подчеркнуть, что сверхпростое определение приведено ниже лишь для иллюстрации и не претендует на точное определение понятия *овал*. Инструкции, составляющие алгоритм ОВАЛ, здесь перечислены. Символ T в этих инструкциях обозначает исследуемый объект. Термин ВЫПУКЛЫЙ используется для обращения к подалгоритму ВЫПУКЛЫЙ, который предназначен для определения, является ли T выпуклым или нет. Инструкцию вида «если A, то B» следует интерпретировать, как «если A, то B, иначе перейти к следующей инструкции».

Алгоритм ОВАЛ:

1) если T не замкнуто, то T не *овал*; стоп.
2) если T самопересекающийся, то T не *овал*; стоп.
3) если T не ВЫПУКЛО, то T не *овал*; стоп.
4) если T не имеет двух более или менее ортогональных осей симметрии, то T не *овал*; стоп.
5) если большая ось T не является гораздо *более* длинной, чем меньшая ось, то T не *овал*; стоп.
6) T — *овал*; стоп.

Подалгоритм ВЫПУКЛЫЙ: в основном этот подалгоритм включает в себя проверку того, сохраняет ли кривизна знак при движении вдоль T в первоначально выбранном направлении.

1) $x = a$ (некоторая начальная точка T).
2) выбрать направление движения вдоль T.
3) $t \approx$ направление касательной к T в x.
4) $x' = x + 1$ (движение из x в соседнюю точку).
5) $t' \approx$ направление касательной к T в x'.
6) $\alpha \approx$ угол между t^1 и t.
7) $x \approx x'$.
8) $t \approx$ направление касательной к T в x.
9) $x' \approx x + 1$.
10) $t' \approx$ направление касательной к T в x'.
11) $\beta \approx$ угол между t' и t.
12) если β не имеет такой же знак, что и α, то T не *выпукло*; возврат.
13) если $x' \approx a$, то T *выпукло*; возврат.
14) перейти к 7).

Примечание. Следует отметить, что первые три инструкции в алгоритме ОВАЛ определенные. Что же касается команд 4) и 5), то они включают определения таких понятий, как «*более* или *менее* ортогональны» и *значительно* длиннее», которые хотя и являются нечеткими, все же менее сложны и более понятны, чем понятие *овал*.Это иллюстрирует основную функцию нечетких алгоритмов определения, а именно, сведение новых или сложных нечетких понятий к более простым или более понятным нечетким понятиям. В более разработанном варианте алгоритма ОВАЛ ответами на 4) и 5) могли бы быть степени выполнения условий в этих инструкциях. Конечным результатом алгоритма тогда была бы степень принадлежности T нечеткому множеству овалов.

В этой связи следовало бы отметить, что в силу (5.15) алгоритм ОВАЛ, как установлено, приблизительно эквивалентен выражению

$$\begin{gathered}\textit{овал} = \textit{замкнутый} \cap \textit{не самопересекающийся} \cap \textit{выпуклый} \\ \cap\, \textit{более или менее ортогональные оси симметрии} \qquad (6.7) \\ \cap\, \textit{большая ось значительно длиннее малой оси},\end{gathered}$$

которое определяет нечеткое множество *овал* как пересечение обычных и нечетких множеств, символы которых стоят в правой части (6.7). Однако одно существенное отличие состоит в том, что этот алгоритм не только определяет правую часть (6.7), но также устанавливает порядок, в котором следует совершить эти вычисления.

Нечеткие алгоритмы порождения

Как видно из названия, нечеткие алгоритмы порождения служат для порождения, а не для определения нечетких множеств. Возможные приложения этих алгоритмов: получение образцов почерка и другого рода образцов; рецепты приготовления пищи; сочинение музыки, предложений в естественном языке, речи.

В качестве простой иллюстрации алгоритмов порождения рассмотрим написание буквы Р, где высота h и основание b представляют собой параметры алгоритма. Для простоты Р будет воспроизводиться как пунктирный образец с восемью точками по вертикальной линии.

Алгоритм Р (h, b):

1) $i = 1$.

2) $X(i) = b$ (первая точка на основании).

3) $X(i+1) \approx X(i) + h/6$ (поставить точку *примерно* на расстоянии $h/6$ над $X(i)$).

4) $i = i + 1$.

5) *Если* $i = 7$, *то* сделать поворот вправо и перейти к 7).

6) Перейти к 3).

7) Продвинуться на $h/6$; поставить точку.

8) Повернуть на 45°; продвинуться на $h/6$: поставить точку.

9) То же самое.

10) То же самое.

11) То же самое; стоп.

Это алгоритм разомкнутого типа в том смысле, что он не содержит обратной связи. Чтобы сделать его менее чувствительным к ошибкам, возникающим при его выполнении, можно было бы ввести нечеткую обратную связь путем введения условия окончания выполнения алгоритма при более или менее удовлетворительном выполнении задачи. Например, если последняя точка на шаге 11) не попадает на вертикальную часть Р, можно вернуться к шагу 8) и уменьшить или увеличить угол поворота на шагах 8)—11), чтобы исправить окончательную ошибку. Изложение рецепта изготовления шоколадных конфет в работе [19] дает хороший пример того, что представляет собой в действительности нечеткий алгоритм порождения с обратной связью.

Нечеткие описательные и бихевиористические алгоритмы

Нечеткий описательный алгоритм служит для описания отношения или отношений между нечеткими переменными. Подобный алгоритм, используемый для приближенного описания поведения системы, будет называться *нечетким бихевиористическим алгоритмом*.

Ниже приведен простой пример описательного алгоритма, обозначенного R, который включает в себя три параметра x, y, z. Этот алгоритм определяет нечеткое тернарное отношение R в области рассуждения $U = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$ с терминами *маленький и большой*, определенными (4.2) и (4.7).

Алгоритм $R(x, y, z)$:

1) если x *мало* и y *велико*, то z *очень мало*, иначе z *не мало*;

2) если x *велико*, то („если y *мало*, то z *очень велико*, иначе z *мало*“) иначе z и y *очень малы*.

При необходимости значения этих высказываний можно вычислить с помощью (5.9) и (5.11). В этом случае отношение R будет пересечением отношений, определенных инструкциями 1) и 2).

Другой пример нечеткого алгоритма отношения $F(x, y)$, который иллюстрирует другой аспект подобных алгоритмов, состоит в следующем.

Алгоритм $F(x, y)$:

1) если x *мало* и x *слабо* увеличить, то y *слабо* увеличится.

2) если x *мало* и x *значительно* увеличить, то y увеличится *значительно.*

3) если x *велико* и x слегка *увеличить*, то y увеличится *средне*.

4) если x *велико* и x увеличить *значительно*, то y увеличится *очень значительно.*

Как и в предыдущем случае, значения нечетких условных предложений в этом алгоритме можно вычислить, используя методы из разделов IV и V, если даны определения первичных терминов *большой* и *маленький*, а также нечетких терминов *слабо*, *значительно*, *средне*.

В качестве простого примера бихевиористического алгоритма предположим, что имеется система S с двумя определенными состояниями (см. [3]), обозначенными g_1 и g_2, двумя нечеткими входными величинами *низкий* и *высокий* и двумя нечеткими выходными величинами *большой* и *малый*. Областью рассуждения для значений входа и выхода является действительная ось. Предположим далее, что поведение S можно приближенно охарактеризовать приведенным ниже алгоритмом. Однако для описания отношения между входом, выходом и состоянием системы вместо высказываний мы используем обычно таблицу переходов.

Алгоритм ПОВЕДЕНИЯ:

x_t / u_t	x_{t+1}		y_t	
	g_1	g_2	g_1	g_2
малый	g_2	g_1	*большой*	*малый*
большой	g_1	g_2	*малый*	*большой*

где u_t — вход в момент t,
y_t — выход в момент t,
x_t — состояние в момент t.

На первый взгляд кажется, что эта таблица определяет обычную детерминированную систему с конечным числом состояний. Однако важно отметить, что в рассматриваемой системе входы и выходы являются нечеткими подмножествами действительной оси. Таким образом, мы могли бы поставить вопрос: каков будет выход системы S, если она находится в состоянии g_1 и вход *очень мал*? В случае данной системы S на этот вопрос можно ответить, применив составное правило вывода (5.16). С другой стороны, этот же вопрос потерял бы смысл, если бы S была детерминированной системой с конечным числом состояний, описываемой предыдущей таблицей.

Нечеткий бихевиористический алгоритм можно использовать для описания и более сложных форм поведения, связанных с наличием случайных элементов в системе. Например, наличие случайных элементов в S могло бы дать следующие нечетковероятностные характеристики ее поведения:

x_t / u_t	x_{t+1}		y_t	
	g_1	g_2	g_1	g_2
малый	g_2 *вероятно*	g_1 *вероятно*	*очень вероятно*	*маловероятно*^{2}
большой	g_1 *вероятно*^{2}	g_1 *маловероятно*^{2}	*маловероятно*^{2}	*очень маловероятно*^{2}

В этой таблице термин *вероятно* и его модификации *очень* и *мало* служат для приближенного описания вероятностных характеристик. Например, «если вход *мал* и текущее состояние есть g_1, то следующее состояние *вероятно* будет g_2». Аналогично, «если вход *велик* и текущее состояние есть g_2, то *очень маловероятно*, что выход будет *велик*. Если значение термина *вероятно* определено следующим образом (см. (4.16)):

$$\textit{вероятно} = 1/1 + 1/,09 + 1/0,8 + 0,8/0,7 + 0,6/0,6 + 0,5/0,5 + 0,3/0,4 + 0,2/0,3, \tag{6,8}$$

$$\textit{маловероятно} = 0,2/0,7 + 0,4/0,6 + 0,5/0,5 + 0,7/0,4 + 0,8/0,3 + 1/0,2 + 1/0,1 + 1/0 \tag{6.9}$$

очень вероятно $\approx 1/1 + 1/0,9 + 1/0,8 + 0,6/0,7 +$

$$+ 0,4/0,6 + 0,3/0,5 + 0,10/,4 \qquad (6.10)$$

очень маловероятно $\approx 0,2/0,6 + 0,3/0,5 + 0,5/0,4 +$

$$+ 0,6/0,3 + 1/0,2 + 1/0,1 + 1/0. \qquad (6.11)$$

Нечеткие алгоритмы принятия решения

Нечеткий алгоритм принятия решения — это нечеткий алгоритм, который служит для получения приближенного описания стратегии или решающего правила. Обычными примерами таких алгоритмов, которые мы используем большей частью подсознательно, являются алгоритмы постановки автомашины на стоянке, покупки дома, пересечения перекрестка и т. д.

Для иллюстрации такого алгоритма рассмотрим два простых примера, взятых из повседневного опыта.

Пример. Переезд перекрестка: удобно разбить рассматриваемый алгоритм на несколько подалгоритмов, каждый из которых применим к определенному типу перекрестков. Для наших целей достаточно описать только один из этих подалгоритмов, а именно, подалгоритм, который используется, когда на перекрестке есть знак стоп. Как и в других примерах этого раздела, мы сделаем ряд упрощающих предположений, чтобы сократить описание алгоритма.

Алгоритм ПЕРЕКРЕСТОК:

1) если есть светофор, то обратиться к алгоритму СВЕТОФОР, иначе, если есть знак стоп, то обратиться к алгоритму ЗНАК, иначе, если есть мигающий желтый сигнал, то обратиться к алгоритму МИГАЛКА, иначе обратиться к алгоритму НЕКОНТРОЛИРУЕМЫЙ.

Подалгоритм ЗНАК:

1) *Если* нет знака «стоп» на вашей стороне, *то если* нет машин на перекрестке, *то* пересекать на *нормальной* скорости, *иначе* ждать, пока автомашины не освободят перекресток, и затем пересекать его.

2) *Если* ваша автомашина не *приблизилась* к перекрестку, *то* продолжать движение с нормальной скоростью в течение *нескольких* секунд; перейти к 2).

3) *Замедлить движение.*

4) *Если* вы *очень* спешите и не видно полицейских машин, и нет машин на перекрестке или *поблизости* от него, *то медленно* проезжайте перекресток.

5) *Если* вы находитесь *очень близко* к перекрестку, *то* остановитесь; перейти к 7).

6) Продолжайте *очень медленно приближаться*; перейти к 5).

7) *Если* на перекрестке или *вблизи* него нет машин, *то* проезжайте.

8) Подождите *несколько* секунд; перейти к 7).

Вряд ли следует говорить, что реальный вариант этого алгоритма был бы намного сложнее. Важным в этом примере является то, что такой алгоритм мог бы быть построен аналогично описанному упрощенному варианту. Более того, видно, что такой нечеткий алгоритм мог бы служить эффективным средством распространения опыта.

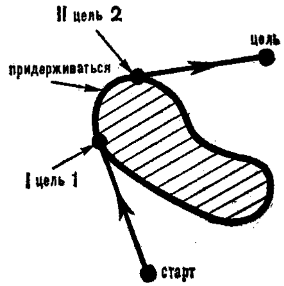


Рис. 3. Задача перевода слепого испытуемого от старта к цели.

В качестве последнего примера рассмотрим алгоритм принятия решения для перевода слепого испытуемого H из начальной позиции *старт* в конечную позицию *цель* (см. рис. 3) (очень сложные четкие алгоритмы такого типа для использования роботами применены в Shakey — роботе, построенном Группой Искусственного Интеллекта в Стенфордском Исследовательском Институте. Описание этого робота приведено в работе [20]).

Алгоритм, названный OBSTACLE (препятствие), по предположению используется человеком-контролером C, который может наблюдать, как H выполняет его инструкции. Эта нечеткая обратная связь играет важную роль в создании возможности для C направить H к *цели* несмотря на нечеткость инструкций и на ошибки их выполнения. Алгоритм OBSTACLE состоит из трех подалгоритмов ALIGN (выравнивать), HUG (придерживаться) и STRAIGHT (прямо). Задача алгоритма STRAIGHT — перевод H со старта в промежуточный пункт *1*, затем из

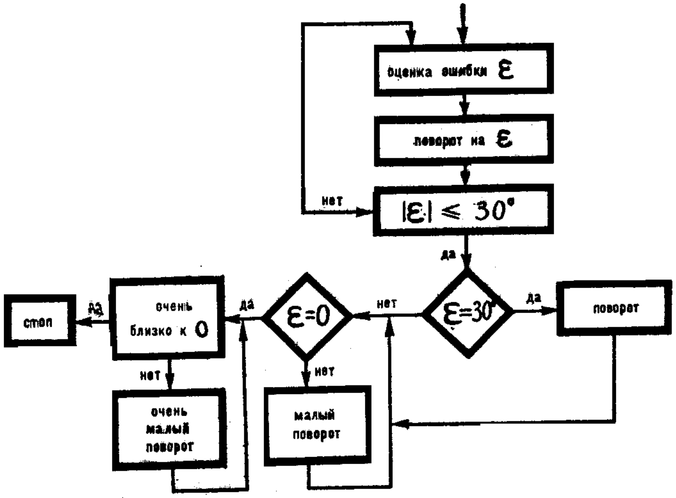
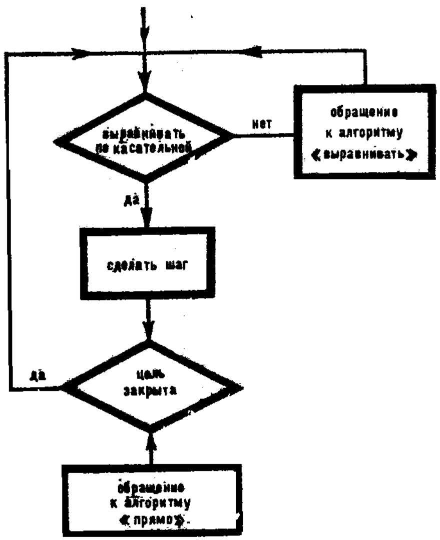


Рис. 4. Подалгоритм «выравнивать».



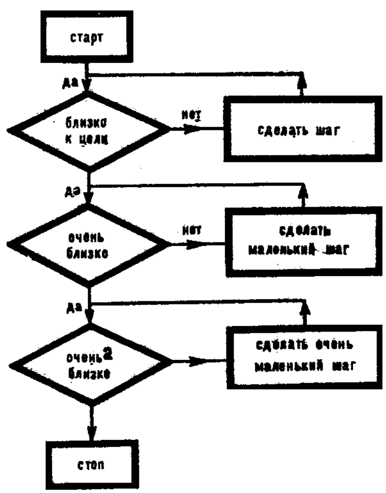


Рис. 5. Подалгоритм «придерживаться».

Рис. 6. Подалгоритм «прямо».

пункта *2* в конечный пункт (см. рис. 3). Алгоритм ALIGN предназначен для ориентации *H* в нужном направлении; алгоритм HUG предназначен для ведения *H* вдоль границы препятствия до тех пор, пока не откроется прямой путь к цели.

Вместо описания этих подалгоритмов в терминах нечетких условных положений, как это делалось в предыдущих примерах, удобней описать их в виде блок-схем, как показано на рис. 4—6. В блок-схеме алгоритма ALIGN ε обозначает ошибку выравнивания, и мы для простоты предположим, что ε не меняет знак. В терминах нечетких высказываний блок-схема алгоритма STRAIGHT, например, переводится в следующие инструкции.

Подалгоритм STRAIGHT:

1) *Если* не *близко*, *то* сделать шаг; перейти к 1).
2) *Если* не *очень близко*, *то* сделать *малый* шаг; перейти к 2).
3) *Если* не *очень очень близко*, *то* сделать *очень малый* шаг; перейти к 3).
4) Стоп.

VII. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В этом и предыдущих разделах данной статьи мы сделали попытку развить подход к анализу систем, которые настолько сложны или плохо определены, что не поддаются точному количественному анализу.

Конечно, полученные нами результаты следует рассматривать лишь как первый пробный шаг в этом направлении. Ясно, что многие важные и второстепенные аспекты нашего подхода рассмотрены здесь недостаточно полно или вовсе не рассмотрены. Сюда относятся вопросы о роли нечеткой обратной связи в реализации нечетких алгоритмов, реализации нечетких алгоритмов в человеческом мозге, взаимосвязи нечетких инструкций, в оценке эффективности нечетких алгоритмов, в применении составного правила вывода и правила преобладающей альтернативы, а также во взаимосвязи неопределенности и вероятности в поведении гуманистических систем.

Как бы то ни было, описанный здесь метод даже в существующем его состоянии можно эффективно использовать для формулирования и приближенного решения самых разнообразных практических задач, особенно в таких областях, как экономика, наука об управлении, психология, лингвистика, ценообразование, искусственный разум, поиск информации, медицина и биология. В большей степени это относится к таким задачам в этих областях, для которых можно найти нечеткие алгоритмы, позволяющие описывать плохо определенные понятия, отношения и правила принятия решений.

Перевод с английского В. А. ГОРЕЛИКА, С. А. ОРЛОВСКОГО *и* Н. И. РИНГО

ЛИТЕРАТУРА

1. L. A. Zadeh. Fuzzy sets.— *Inform. Contr.*, vol. 8, 1965, pp. 338—353.
2. L. A. Zadeh. Similarity relation and fuzzy ordering.— *Inform. Sci.*, vol. 3. 1971, pp. 177—200.
3. L. A. Zadeh. Towards a theory of fuzzy systems.— В сб.: Aspects of Network and System Theory. N. Y., Holt, Rinehart and Winston, 1971.
4. L. A. Zadeh. Quantitative fuzzy semantics.— *Inform. Sci.*, vol. 3. 1971, pp. 159—176.
5. L. A. Zadeh. Fuzzy Languages and their relations to human and machine intelligence.— В сб.: Proc. Conf. Man and Computer, 1970.
6. L. A. Zadeh. Fuzzy algorithms.— *Inform. Contr.*, vol. 12, 1968, pp. 94—102.
7. E. Santos. Fuzzy Algorithms.— *Inform. Contr.*, vol. 17, 19, 1970, pp. 326—339.
8. L. A. Zadeh. On fuzzy algorithms. Electron. Res. Lab., Univ. California, Berkeley, Memo. M-325, 1971.
9. S.-K. Chang. On the execution of fuzzy programs using finitestate machines.— *IEEE Trans. Comput.*, vol. C—21. 1972, Mar., pp. 241—253.
10. S. S. L. Chang and L. A. Zadeh. Fuzzy mapping and control.— *IEEE Trans. Syst., Man, Cybern.*, vol. SMC—2. 1962, Jan., pp. 30—34.
11. R. E. Bellman and L. A. Zadeh. Decision-making in a fuzzy environment.— *Management Sci.*, vol. 17. 1970.
12. J. A. Goguen. The logic of inexact concepts.— *Syn.*, vol. 19. 1969, pp. 325—373.
13. G. Lakoff. Hedges: a study in meaning criteria and the logic of fuzzy concepts.— *Proc. 8 th Reg. Meet. Chicago Linguist. Soc.*, 1972.
14. L. A. Zadeh. A system-theoretic view of behavior modification. Electron. Res. Lab., Univ. California, Berkeley, Mema. M—320, 1972.

15. L. A. Zadeh. A fuzzy-set-theoretic interpretation of hedges. Electron. Res. Lab., Univ. California, Berkeley, Memo. M—335, 1972.
16. A. De Luca and S. Termini. A definition of non-probabilistic entropy in the setting of fuzzy sets theory.— *Inform. Contr.*, vol. 20, 1972, pp. 301—312.
17. R. C. T. Lee. Fuzzy logic and resolution principle.— *J. Ass. Comput. Mach.*, vol. 19, 1972, pp. 109—119.
18. G. E. Hughes and M. J. Cresswell. An Introduction to Modal Logic. London, Methuen, 1968.
19. R. S. Ledley. Fortran IV Programming. New York, McGraw Hill, 1966.
20. B. Raphael, R. Duda, R. E. Fikes, P. E. Hart, N. Nilson, P. W. Thorndyke and B. M. Wilbur. Research and applications — artificial intelligence Stanford Res. Inst., Menlo Park, Calif., Final Rep., 1971, Oct.